



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 1.

- a) Determinați numerele întregi x pentru care fracția $\frac{3x+2}{2x-1}$ este număr întreg.
b) Determinați numerele raționale x pentru care fracția $\frac{3x+2}{2x-1}$ este număr întreg.

SOLUȚIE:

- a) Impunem condiția $(2x-1)|(3x+2)$; atunci $(2x-1)|[2(3x+2)-3(2x-1)]$, deci $(2x-1)|7$. Obținem că $x \in \{-3, 0, 1, 4\}$ și toate aceste patru valori sunt convenabile. 4p
b) Din $\frac{3x+2}{2x-1} = m \in \mathbb{Z}$ obținem că $x = \frac{m+2}{2m-3}$, $m \in \mathbb{Z}$. Cum $\frac{m+2}{2m-3} \neq \frac{1}{2}, \forall m \in \mathbb{Z}$, rezultă că numerele raționale x căutate sunt toate numerele de forma $x = \frac{m+2}{2m-3}$, unde $m \in \mathbb{Z}$ 3p

Problema 2.

Demonstrați că, oricare ar fi numărul natural nenul n , are loc inegalitatea

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1} \leq \frac{5}{6}.$$

SOLUȚIE:

Avem că $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1} > (n+1) \cdot \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, prin urmare este adevărată inegalitatea din stânga. 3p

Notăm $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1}$. Cum $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deducem că

$a_n < a_1 = \frac{5}{6}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci este adevărată inegalitatea din dreapta. 4p

Obs. Se poate folosi inducția matematică.

Problema 3.

a) Demonstrați că suma inverselor lungimilor a două înălțimi ale unui triunghi este mai mare decât inversul lungimii celei de-a treia înălțimi a triunghiului.

b) Un triunghi neisoscel are două înălțimi de lungimi 2 respectiv 5. Determinați lungimea celei de-a treia înălțimi, știind că este tot un număr natural.

Gazeta Matematică 9/2016 (Supliment)

SOLUȚIE:

a) Folosind notațiile uzuale în triunghi, avem că $a = \frac{2S}{h_a}, b = \frac{2S}{h_b}$ și $c = \frac{2S}{h_c}$ **2p**

Din inegalitatea triunghiului, $(a+b > c)$ rezultă $\frac{2S}{h_a} + \frac{2S}{h_b} > \frac{2S}{h_c}$, prin urmare $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} > \frac{1}{h_c}$ **2p**

b) Fie $h_a = 2, h_b = 5$; atunci $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} > \frac{1}{h_c}$ și $\frac{1}{5} + \frac{1}{h_c} > \frac{1}{2}$. Deducem că $\frac{10}{7} < h_c < \frac{10}{3}$. Cum h_c este număr natural diferit de 2 și 5 (triunghiul fiind neisoscel), rezultă că $h_c = 3$ **3p**

Problema 4.

La ora 14:30, din Iași pleacă un tren care ajunge la București la ora 22:00. În aceeași zi și pe același traseu, la ora 16:00, din București pleacă un tren care ajunge la Iași la ora 23:00. Presupunem că fiecare dintre cele două trenuri parcurge traseul cu viteză constantă.

Stabiliți, cu eroare de cel mult un minut, care este ora întâlnirii celor două trenuri.

SOLUȚIE:

Notăm cu d distanța Iași-București, în kilometri. Viteza primului tren este $v_1 = \frac{d}{7\frac{1}{2}} = \frac{2d}{15}$ km/h iar viteza celui

de-al doilea tren este $v_2 = \frac{d}{7}$ km/h. **2p**

Fie x ora întâlnirii celor două trenuri. Cum suma distanțelor parcurse de cele două trenuri până în momentul x este egală cu distanța Iași-București, obținem că $\left(x - 14\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2d}{15} + (x - 16) \cdot \frac{d}{7} = d$ **3p**

Ecuția obținută are soluția $x = \frac{548}{29} \approx 18,897$. Ora aproximativă a întâlnirii este 18:54. **2p**